



Exercice 2

Étudions la dérivabilité sur \mathbb{R} des fonctions suivantes :

- Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = |x - 1| + |x^2 - 2x - 3|.$$

Comme $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ alors,

$$f(x) = |x - 1| + |(x + 1)(x - 3)| = |x - 1| + |x + 1||x - 3|$$

x	-1	1	3
$ x - 1 $	$1 - x$	$1 - x$	$x - 1$
$ x^2 - 2x - 3 $	$x^2 - 2x$	$-x^2 + 2x$	$x^2 - 2x$
	-3	+3	-3

– Sur l'intervalle, $] - \infty, -1[$,

$$f(x) = 1 - x + x^2 - 2x - 3 = x^2 - 3x - 2$$

– Sur l'intervalle, $] -1, 1[$,

$$f(x) = 1 - x - x^2 + 2x + 3 = -x^2 + x + 4$$

– Sur l'intervalle, $]1, 3[$,

$$f(x) = x - 1 - x^2 + 2x + 3 = -x^2 + 3x + 2$$

– Sur l'intervalle, $]3, +\infty[$,

$$f(x) = x - 1 + x^2 - 2x - 3 = x^2 - x - 4$$

et

$$f(-1) = 2, f(1) = 4, f(3) = 2$$

Ainsi :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 2, & x \leq -1 \\ -x^2 + x + 4, & -1 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 3x + 2, & 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - x - 4, & x \geq 3 \end{cases}$$

Puisque la restriction de f à chaque intervalle $] - \infty, -1[$, $] -1, 1[$, $]1, 3[$, $]3, +\infty[$ est un polynôme, alors f est dérivable sur chacun de ces intervalles. Examinons la dérivabilité aux points : -1 , 1 et 3 .

\rightsquigarrow Dérivabilité en -1 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 3x - 2 - 2}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x + 1)(x - 4)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x - 4) \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x^2 + x + 4 - 2}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(-x + 2)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x + 2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Module 6 : Méthodes Quantitatives I
Matière : Mathématiques I

Professeure Amale LAHLOU

Corrigé de la Série 2

Exercice 1

Calculons la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- Soit la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 \ln |2x + 1|.$$

Déterminons le domaine de définition de f :

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}, \quad 2x + 1 \neq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}, \quad x \neq -\frac{1}{2}\right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

Comme la fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ alors f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ on a,

$$f'(x) = 2x \ln |2x + 1| + \frac{2x^2}{2x + 1}.$$

- Soit la fonction définie par :

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \exp \left[x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right].$$

Déterminons le domaine de définition de g :

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R}, \quad 1 + \frac{1}{x} > 0 \text{ et } x \neq 0\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x + 1}{x} > 0 \text{ et } x \neq 0\right\} \\ &=] - \infty, -1[\cup]0, +\infty[. \end{aligned}$$

car

x	-1	0	$+\infty$
x	-	\emptyset	+
$x + 1$	-	\emptyset	+
$\frac{x+1}{x}$	+	\emptyset	+

Comme la fonction g est la composée de fonctions dérivables sur $] - \infty, -1[\cup]0, +\infty[$ alors g est dérivable et pour tout $x \in] - \infty, -1[\cup]0, +\infty[$ on a,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(2x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + x^2 \frac{\frac{-1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}\right) e^{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \\ &= \left(2x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1 + x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2} \end{aligned}$$

Comme $f'_g(-1) = -5$, $f'_d(-1) = 3$ et $f'_g(-1) \neq f'_d(-1)$ alors f est non dérivable point -1 .

\rightsquigarrow Dérivabilité en 1 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 + x + 4 - 4}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) \\ &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 3x + 2 - 4}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(2 - x)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (2 - x) \\ &= 1\end{aligned}$$

Comme $f'_g(1) = -1$, $f'_d(1) = 1$ et $f'_g(1) \neq f'_d(1)$ alors f est non dérivable au point 1.

\rightsquigarrow Dérivabilité en 3 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2 + 3x + 2 - 2}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x(x - 3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x) \\ &= -3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 - x - 4 - 2}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (2 + x) \\ &= 5\end{aligned}$$

$f'_g(3) = -3$, $f'_d(3) = 5$ et $f'_g(3) \neq f'_d(3)$ alors f est non dérivable au point 3.

Autre méthode : f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}$ et,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & x < -1 \\ -2x + 1 & -1 < x < 1 \\ -2x + 3 & 1 < x < 3 \\ 2x - 1 & x > 3 \end{cases}$$

Comme f' admet des limites à droite et à gauche au point -1 (resp. 1 et 3), elle sera dérivable en ce point si et seule-

ment si,

$$\left\{ \begin{array}{l} * f \text{ est continue en ce point et} \\ * \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) \\ \left(\begin{array}{l} \text{resp.} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) \end{array} \right) \end{array} \right.$$

$\rightsquigarrow f$ est continue en -1 mais,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -5 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = 3$$

Donc f est non dérivable au point -1 .

$\rightsquigarrow f$ est continue en 1 mais,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1$$

Donc f est non dérivable au point 1.

$\rightsquigarrow f$ est continue en 3 mais,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -3 \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 5$$

Donc f est non dérivable au point 3.

• Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Comme $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ alors pour tout $x \neq 1$,

$$g(x) = |x| \frac{|x - 1|}{x - 1}$$

x	0	1
$ x $	$-x$	x
$\frac{ x-1 }{x-1}$	-1	1
$g(x)$	x	x

et par suite,

$$g(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \text{ ou } x > 1 \\ -x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

ou encore,

$$g(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \\ -x & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Comme la restriction de g à chaque intervalle $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ est un polynôme alors g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et on a :

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \text{ ou } x > 1 \\ -1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow g$ est non continue au point 1 puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq g(1)$, donc g est non dérivable au point 1.

$\rightsquigarrow g$ est continue au point 0 mais

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -1$$

donc g est non dérivable au point 0.

Remarque :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x - 1}{x - 1} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x) = -1$$

Ceci est dû à la non continuité de g en ce point.

• Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = \begin{cases} \ln\left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La fonction h est dérivable sur \mathbb{R}^* , puisque la restriction de cette dernière à \mathbb{R}^* est la composée de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^* .

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0 = h(0).$$

Donc, la fonction h est bien continue en 0.

Étudions la dérivabilité de h en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\right)}{e^{-\frac{1}{x^2}}} x e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= 0^+ \end{aligned}$$

car

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{x^{-2}} = 0^+$$

Ainsi, h est dérivable en 0 et $h'(0) = 0$.

Autre méthode : Soit $x \neq 0$,

$$h'(x) = \frac{\frac{2}{x^3}}{1 + e^{\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{2}{x^3}}{1 + e^{\frac{1}{x^2}}} \right)$$

Cette limite est une Forme Indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. En appliquant, par exemple, la règle de l'HOSPITAL on obtient,

$$\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = 0$$

la fonction f est dérivable sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ puisque la restriction de f à l'intervalle $]0, 1[$ est la fonction racine qui est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et la restriction de f à $]1, +\infty[$ est un polynôme qui est dérivable sur \mathbb{R} . on a :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ 2ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

Comme f' admet une limite à gauche et à droite au point 1, elle sera dérivable en 1 si et seulement si,

$$\begin{cases} * f \text{ est continue au point 1, i.e.,} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \\ * \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x). \end{cases}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \iff 1 = a + b + 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \iff \frac{1}{2} = 2a + b.$$

D'où le système suivant,

$$\begin{cases} a + b + 1 &= \frac{1}{2} \\ 2a + b &= \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ b &= \frac{-1}{2} \end{cases}$$

et la fonction cherchée est la suivante,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 & x > 1 \end{cases}$$

Exercice 4

Déterminons la différentielle de chacune des fonctions suivantes :

• Soit la fonction $y_1 = x \ln(x) - x$. Sa différentielle est :

$$dy_1 = [x \ln(x) - x]' dx = \ln(x) dx$$

donc,

$$dy_1 = \ln(x) dx$$

• Soit la fonction $y_2 = \ln(\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

Sa différentielle est :

$$dy_2 = \left[\frac{\ln(1+x^2)}{2} \right]' dx = \frac{1}{2} 2x \frac{1}{1+x^2} dx$$

donc,

$$dy_2 = \frac{x}{1+x^2} dx$$

• Soit la fonction

$$y_3 = (2x+1)^{x+1} = \exp[(x+1) \ln(2x+1)]$$

Sa différentielle est :

$$\begin{aligned} dy_3 &= \left[(2x+1)^{x+1} \right]' dx \\ &= \left(\ln(2x+1) + \frac{2(x+1)}{2x+1} \right) \exp[(x+1) \ln(2x+1)] dx \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & x > 1 \end{cases}$$

donc,

$$dy_3 = \left(\ln(2x+1) + 1 + \frac{1}{1+2x} \right) (2x+1)^{x+1} dx$$

Exercice 5

Soit la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

La fonction f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

La tangente à la courbe représentative de f au point 1 est donné par :

$$\begin{aligned} y &= f(1) + f'(1)(x-1) \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1) \\ &= \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}x \end{aligned}$$

Étudions maintenant la position du graphe de la fonction par rapport à cette tangente. Pour cela on va calculer $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - y)$. Posons le changement de variables $x = 1 + h$ (quand $x \rightarrow 1$ alors $h \rightarrow 0$). Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - y) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sqrt{2+h} - \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}h \right) \\ &= 0^- \end{aligned}$$

Donc, la courbe \mathcal{C}_f est au dessous de la tangente au point 1 (en fait la fonction f est concave sur D_f).

Exercice 6

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(\ln(x))$$

Déterminons le domaine de définition de f , soit,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } \ln(x) > 0\} =]1, +\infty[.$$

Calculons les dérivées première et deuxième de f :

$$f'(x) = \frac{[\ln(x)]'}{\ln(x)} = \frac{1}{x \ln(x)} = (x \ln(x))^{-1}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -(\ln(x) + 1)(x \ln(x))^{-2} \\ &= \frac{-(\ln(x) + 1)}{(x \ln(x))^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f''(x) + (1 + \ln(x))(f'(x))^2 = -\frac{\ln(x) + 1}{(x \ln(x))^2} + \frac{\ln(x) + 1}{(x \ln(x))^2} = 0$$

Exercice 7

Déterminions les dérivées $n^{\text{ième}}$ des fonctions suivantes :

- La fraction rationnelle définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} = (2x+1)^{-1}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$.

$$f^{(0)}(x) = f(x) = (2x+1)^{-1}$$

$$f'(x) = (-1)2(2x+1)^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)2^2(2x+1)^{-3} = (-1)^2 2! 2^2 (2x+1)^{-3}$$

$$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3)2^3(2x+1)^{-4} = (-1)^3 3! 2^3 (2x+1)^{-4}$$

On constate que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x+1)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Démonstration par récurrence :

Vérification : pour $n = 0$,

$$f^{(0)}(x) = \frac{(-1)^0 0! 2^0}{(2x+1)^1} = \frac{1}{2x+1} = f(x) \quad (\text{vraie})$$

Hypothèse de récurrence : On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x+1)^{n+1}}.$$

Démonstration : On montre que la propriété est vraie à l'ordre $(n+1)$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! 2^{n+1}}{(2x+1)^{n+2}}.$$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)} \right)'(x) \\ &= (-1)^n n! 2^n (-1)(n+1) 2 (2x+1)^{-(n+1)-1} \\ &= (-1)^{n+1} (n+1)! 2^{n+1} (2x+1)^{-(n+2)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (n+1)! 2^{n+1}}{(2x+1)^{n+2}} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x+1)^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- La fonction définie par :

$$g(x) = \ln(1+2x)$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$.

$$g^{(0)}(x) = g(x) = \ln(1+2x)$$

$$g'(x) = \frac{2}{1+2x} = 2f(x)$$

$$g''(x) = 2f'(x)$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= 2f^{(n-1)}(x) \\ &= 2 \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1} (n-1)!}{(1+2x)^n} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} 2^n (n-1)!}{(1+2x)^n} \end{aligned}$$

• La fonction définie par :

$$h(x) = (2x+1)^{n-1}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

\rightsquigarrow si $n = 0$ alors,

$$\begin{aligned} h(x) &= (2x+1)^{-1} = \frac{1}{2x+1} \\ h^{(0)}(x) &= h(x) \end{aligned}$$

\rightsquigarrow si $n = 1$ alors,

$$\begin{aligned} h(x) &= (2x+1)^0 = 1 \\ h'(x) &= 0 \end{aligned}$$

\rightsquigarrow si $n > 1$ alors $h(x) = (2x+1)^{n-1}$ et,

$$\begin{aligned} h''(x) &= 2^2(n-2)(n-1)(2x+1)^{n-3} \\ f^{(3)}(x) &= 2^3(n-3)(n-2)(n-1)(2x+1)^{n-4} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= 2^k(n-k)(n-(k-1)) \cdots (n-1)(2x+1)^{n-(k+1)} \\ &= \frac{2^k 1.2.3 \cdots (n-(k+1))(n-k) \cdots (n-1)}{1.2 \cdots (n-(k+1))} \\ &\quad \times (2x+1)^{n-(k+1)} \\ &= \frac{2^k(n-1)}{(n-(k+1))!} (2x+1)^{n-(k+1)} \quad \forall 0 \leq k \leq n-1 \\ &\vdots \\ f^{(n-1)}(x) &= 2^{n-1} 1.2.3 \cdots (n-2)(n-1)(2x+1)^0 \\ &= 2^{n-1}(n-1)! \\ f^{(n)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 8

a. Calculons la dérivée d'ordre n de la fonction définie par :

$$f(x) = xe^x$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}_f sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= f(x) = xe^x \\ f'(x) &= e^x + xe^x = e^x + f(x) \\ f''(x) &= e^x + f'(x) = 2e^x + f(x) \\ f^{(3)}(x) &= 2e^x + f'(x) = 3e^x + f(x) \\ f^{(4)}(x) &= 3e^x + f'(x) = 4e^x + f(x) \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = ne^x + f(x) = (n+x)e^x$$

Raisonnement par récurrence :

Vérification : Pour $n = 0$

$$f^{(0)}(x) = (0+x)e^x = xe^x = f(x) \quad (\text{vraie})$$

Hypothèse de récurrence : On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n :

$$f^{(n)}(x) = (n+x)e^x.$$

Démonstration : On montre que la propriété est vraie à l'ordre $(n+1)$:

$$f^{(n+1)}(x) = (n+1+x)e^x.$$

En effet,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left[f^{(n)}(x) \right]' \\ &= e^x + (n+x)e^x \\ &= (n+1+x)e^x \end{aligned}$$

Conclusion :

$$f^{(n)}(x) = (n+x)e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ou encore

$$f^{(n)}(x) - (n+x)e^x = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Calculons la dérivée d'ordre n de la fonction définie par :

$$g(x) = (x+1)e^{-x}$$

La fonction g est de classe \mathcal{C}_f sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} g^{(0)}(x) &= g(x) = (x+1)e^{-x} \\ g'(x) &= e^{-x} - (x+1)e^{-x} \\ &= e^{-x} - g(x) \\ g''(x) &= -e^{-x} - g'(x) \\ &= -e^{-x} - e^{-x} + g(x) \\ &= -2e^{-x} + g(x) \\ g^{(3)}(x) &= 2e^{-x} + g'(x) \\ &= 2e^{-x} + e^{-x} - g(x) \\ &= 3e^{-x} - g(x) \\ g^{(4)}(x) &= -3e^{-x} - g'(x) \\ &= -3e^{-x} - e^{-x} + g(x) \\ &= -4e^{-x} + g(x) \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= (-1)^{n+1}ne^{-x} + (-1)^n g(x) \\ &= [(-1)^{n+1}n + (-1)^n(x+1)]e^{-x} \\ &= [(-1)^n x + (-1)^n(1-n)]e^{-x} \\ &= (a_n x + b_n)e^{-x} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} a_n = (-1)^n, \\ b_n = (-1)^n(1-n), \end{cases}$$

Raisonnement par récurrence :

Vérification : Pour $n = 0$

$$g^{(0)} = (a_0x + b_0)e^{-x} = (x + 1)e^{-x} = g(x) \quad (\text{vraie})$$

Hypothèse de récurrence : On suppose que la propriété est vraie à l'ordre n :

$$g^{(n)}(x) = ((-1)^n x + (-1)^n (1 - n)) e^{-x} = (a_n x + b_n) e^{-x}$$

Démonstration : On montre que la propriété est vraie à l'ordre $(n + 1)$:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= [(-1)^{n+1} x + (-1)^{n+1} (1 - (n + 1))] e^{-x} \\ &= (a_{n+1} x + b_{n+1}) e^{-x} \end{aligned}$$

avec,

$$\begin{cases} a_{n+1} = (-1)^{n+1} \\ b_{n+1} = (-1)^{n+1} (1 - (n + 1)) = (-1)^n n \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= [g^{(n)}(x)]' \\ &= a_n e^{-x} - (a_n x + b_n) e^{-x} \\ &= (-a_n x + a_n - b_n) e^{-x} \\ &= (a_{n+1} x + b_{n+1}) e^{-x} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1} \\ b_{n+1} = a_n - b_n = (-1)^n - (-1)^n (1 - n) = (-1)^n n \end{cases}$$

Conclusion :

$$g^{(n)}(x) = (a_n x + b_n) e^{-x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

avec

$$\begin{cases} a_n = (-1)^n \\ b_n = (-1)^n (1 - n) \end{cases}$$

Exercice 9

En utilisant la formule de LEIBNIZ, calculons la dérivée d'ordre n des fonctions suivantes :

- La fraction rationnelle définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x + 1}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$. On constate que :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x + 1} = h(x)g(x)$$

où,

$$h(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2x + 1}$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} h^{(0)}(x) &= h(x) = x^2 \\ h'(x) &= 2x \\ h''(x) &= 2 \\ h^{(k)}(x) &= 0 \quad \forall k \geq 3 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k 2^k k!}{(1 + 2x)^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

En appliquant la formule de LEIBNIZ, on trouve :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= [h(x)g(x)]^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^2 C_n^k h^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= C_n^0 h(x) g^{(n)}(x) + C_n^1 h'(x) g^{(n-1)}(x) \\ &\quad + C_n^2 h''(x) g^{(n-2)}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{0!(n-0)!} \frac{x^2 (-1)^n n! 2^n}{(2x+1)^{n+1}} \\ &\quad + \frac{n!}{1!(n-1)!} \frac{2x (-1)^{n-1} (n-1)! 2^{n-1}}{(2x+1)^n} \\ &\quad + \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{2(-1)^{n-2} (n-2)! 2^{n-2}}{(2x+1)^{n-1}} \\ &= \frac{x^2 (-1)^n n! 2^n}{(2x+1)^{n+1}} + \frac{x (-1)^{n-1} n! 2^n}{(2x+1)^n} \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-2} n! 2^{n-2}}{(2x+1)^{n-1}} \\ &= \frac{(-1)^n 2^n n!}{(1+2x)^{n+1}} \left[x^2 - x(2x+1) + \frac{1}{4}(2x+1)^2 \right] \\ &= \frac{(-1)^n 2^{n-2} n!}{(1+2x)^{n+1}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f^{(5)}(0) = -2^3 5! = -960.$$

- La fonction définie par :

$$g(x) = (2x + 1) \ln(1 + 2x)$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\frac{1}{2}, +\infty[$. On constate que :

$$g(x) = (2x + 1) \ln(2x + 1) = f(x)h(x)$$

où,

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(1 + 2x)$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= f(x) = 2x + 1 \\ f'(x) &= 2 \\ f^{(k)}(x) &= 0 \quad \forall k \geq 2 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} 2^k (k-1)!}{(1+2x)^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

En appliquant la formule de LEIBNIZ, on trouve :

$$\begin{aligned}
 g^{(n)}(x) &= [f(x)h(x)]^{(n)} \\
 &= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\
 &= \sum_{k=0}^1 C_n^k f^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\
 &= C_n^0 f(x) h^{(n)}(x) + C_n^1 f'(x) h^{(n-1)}(x) \\
 &= (2x+1) \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! 2^n}{(2x+1)^n} \\
 &\quad + 2n \frac{(-1)^{n-2} (n-2)! 2^{n-1}}{(2x+1)^{n-1}} \\
 &= \frac{(-1)^n 2^n (n-2)!}{(1+2x)^{n-1}} (n - (n-1)) \\
 &= \frac{(-1)^n 2^n (n-2)!}{(1+2x)^{n-1}}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g^{(5)}(0) = -2^5 3! = -192.$$

• La fonction définie par :

$$h(x) = x^2(2x+1)^{n-1}$$

↪ Pour $n = 0$ on a :

$$h(x) = \frac{x^2}{2x+1} \quad \text{et} \quad h^{(0)}(x) = h(x)$$

↪ Pour $n = 1$ on a :

$$h(x) = x^2 \quad \text{et} \quad h'(x) = 2x$$

↪ Pour $n > 1$, la fonction est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . On constate que :

$$h(x) = x^2(2x+1)^{n-1} = f(x)g(x)$$

où,

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = (2x+1)^{n-1}$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
 f^{(0)}(x) &= f(x) = x^2 \\
 f'(x) &= 2x \\
 f''(x) &= 2 \\
 f^{(k)}(x) &= 0 \quad \forall k \geq 3
 \end{aligned}$$

D'autre part, $\forall 0 \leq k < n-1$

$$\begin{aligned}
 g^{(k)}(x) &= \frac{2^k (n-1)!}{(n-(k+1))!} \\
 g^{(n-1)}(x) &= 2^{n-1} (n-1)! \\
 g^{(n)}(x) &= 0
 \end{aligned}$$

En appliquant la formule de LEIBNIZ, on trouve :

$$\begin{aligned}
 h^{(n)}(x) &= [f(x)g(x)]^{(n)} \\
 &= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
 &= \sum_{k=0}^2 C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\
 &= C_n^0 f(x) g^{(n)}(x) + C_n^1 f'(x) g^{(n-1)}(x) \\
 &\quad + C_n^2 f''(x) g^{(n-2)}(x) \\
 &= C_n^1 f'(x) g^{(n-1)}(x) + C_n^2 f''(x) g^{(n-2)}(x) \\
 &= 2^{n-2} (n-1)! (4x + n(n-1))
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$h^{(5)}(0) = 2^3 4! (20) = 3840.$$

Exercice 10

Application du théorème de ROLLE.

• Soit la fonction définie sur $[-1, 2]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + x + 1) & -1 \leq x \leq 1 \\ 3x - 6 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

On a $x^2 + x + 1 > 0$ car son discriminant $\Delta = -3 < 0$ et le coefficient de x^2 est positif. Donc la restriction de f à $[-1, 1]$ est la composée de fonctions continues sur $[-1, 1]$. La restriction de f à $[1, 2]$ est un polynôme, donc continue sur $[1, 2]$ et d'une part on a :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x^2 + x + 1) = \ln(3)$$

d'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 6) = -3$$

Ainsi, la fonction f n'est pas continue au point 1, et par suite, on ne peut pas appliquer le théorème de ROLLE à f sur $[-1, 2]$ même si on a $f(-1) = f(2)$.

• Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = e^{x^4 - 3x^2 + 2}$$

f est définie et continue sur $[-2, 2]$, dérivable sur $] -2, 2[$ et on a :

$$g'(x) = (4x^3 - 6x)e^{x^4 - 3x^2 + 2}.$$

De plus $g(-2) = g(2)$ car la fonction est paire. En appliquant le théorème de ROLLE : $\exists c \in] -2, 2[$ tel que $g'(c) = 0$ Or,

$$\begin{aligned}
 g'(x) = 0 &\iff 4x^3 - 6x = 0 \\
 &\iff 2x(2x^2 - 3) = 0 \\
 &\iff x = 0 \text{ ou } x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}
 \end{aligned}$$

ceci est équivalent à dire que le point c vérifiant le théorème de ROLLE appliqué à f sur $[-2, 2]$ est tel que :

$$c \in \left\{ 0, -\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right\}$$

Exercice 11

a. Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x - x - 2$$

f est définie, continue sur le segment $[\ln(2), 2\ln(2)]$ et vérifie en plus,

$$\begin{cases} f(\ln(2)) = -\ln(2) < 0, \\ f(2\ln(2)) = 2 - \ln(4) > 0, \end{cases}$$

Alors, d'après théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe au moins $c \in]\ln(2), 2\ln(2)[$ tel que $f(c) = 0$, i.e., $e^c = c + 2$. ceci veut dire que l'équation $e^x = 2 + x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $] \ln(2), 2\ln(2)[$. Or,

$$f'(x) = e^x - 1 > 0, \quad \forall x > 0$$

donc f est strictement croissante sur $[\ln(2), 2\ln(2)]$. Ainsi, la solution trouvée de l'équation $e^x = x + 2$ est en fait une solution unique sur $] \ln(2), 2\ln(2)[$.

b. Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 1 + \ln(2 + x^2) - 3x$$

f est définie et continue sur \mathbb{R} en particulier sur $[0, 1]$ et vérifie en plus,

$$\begin{cases} f(0) = 1 + \ln(2) > 0, \\ f(1) = 1 + \ln(3) - 3 = \ln(3) - 2 < 0, \end{cases}$$

Alors, d'après théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe au moins $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 0$, i.e.,

$$1 + \ln(2 + c^2) - 3c = 0$$

ceci veut dire que l'équation $1 + \ln(2 + x^2) = 3x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$. Or,

$$f'(x) = \frac{2x}{2 + x^2} - 3 = \frac{-3x^2 + 2x - 6}{x^2 + 2} < 0$$

(puisque l'équation du numérateur $-3x^2 + 2x - 6 = 0$ a un discriminant $\Delta = -17 < 0$ et le coefficient de x^2 est négatif); donc f est strictement décroissante sur $]0, 1[$. Ainsi, la solution trouvée de l'équation $1 + \ln(2 + x^2) = 3x$ est en fait une solution unique sur $]0, 1[$.

c. Soit la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + \ln(1 + x)$$

On a $f(0) = 0$ et supposons que l'équation $f(x) = 0$ admet une autre solution x_0 autre que 0. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_0 > 0$.

La fonction f est définie, continue sur $[0, x_0]$ et dérivable sur $]0, x_0[$ avec,

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{1 + x}.$$

Comme $f(0) = f(x_0)$ alors, d'après théorème de ROLLE, il existe au moins $c \in]0, x_0[$ tel que

$$f'(c) = 0 \quad \text{i.e.,} \quad 2c + \frac{1}{1 + c} = 0$$

Ceci étant impossible puisque $2c > 0$ et $\frac{1}{1+c} > 0$. D'où l'équation $x^2 + \ln(1 + x) = 0$ admet que 0 comme solution.

d. Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 + 9x^2 - 4$$

f est continue sur $[0, +\infty[$ et vérifie en plus,

$$\begin{cases} f(0) = -4 < 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \end{cases}$$

Alors, d'après théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe au moins $c \in]0, +\infty[$ tel que $f(c) = 0$, i.e., $c^3 + 9c - 4 = 0$. ceci veut dire que l'équation $x^3 + 9x^2 - 4 = 0$ admet au moins une solution strictement positive. Or,

$$f'(x) = 3x^2 + 18x > 0, \quad \forall x > 0$$

donc f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, l'équation $x^3 + 9x^2 - 4 = 0$ admet une unique solution strictement positive.

Exercice 12

Application du Théorème des Accroissements Finis (T.A.F.)

a. La fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

est définie, continue sur $[x, 2x]$ pour tout $x > 0$ et dérivable sur $]x, 2x[$ avec,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x}.$$

D'après T.A.F., il existe au moins $c \in]x, 2x[$ tel que :

$$f(2x) - f(x) = (2x - x)f'(c)$$

i.e.,

$$\ln(2x + 1) - \ln(x + 1) = \frac{x}{1 + c}$$

ou encore,

$$\ln\left(\frac{2x + 1}{x + 1}\right) = \frac{x}{1 + c}$$

Comme,

$$\begin{aligned} 0 < x < c < 2x &\implies 1 + x < 1 + c < 1 + 2x \\ &\implies \frac{1}{1 + 2x} < \frac{1}{1 + c} < \frac{1}{1 + x} \\ &\implies \frac{x}{1 + 2x} < \frac{x}{1 + c} < \frac{x}{1 + x} \quad (\text{car } x > 0) \\ &\implies \frac{x}{1 + 2x} < \ln\left(\frac{2x + 1}{x + 1}\right) < \frac{x}{1 + x} \end{aligned}$$

On remarque qu'on a l'égalité des trois termes au point 0. D'où,

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{x}{1 + 2x} \leq \ln\left(\frac{2x + 1}{x + 1}\right) \leq \frac{x}{1 + x}$$

b. La fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x$ est définie, continue sur $[0, x]$ pour tout $x > 0$ et dérivable sur $]0, x[$ avec, $g'(x) = e^x$.

D'après T.A.F., il existe au moins $c \in]0, x[$ tel que :

$$g(x) - g(0) = (x - 0)g'(c)$$

i.e.,

$$e^x - 1 = xe^c.$$

Comme,

$$\begin{aligned} 0 < c < x &\implies 1 < e^c < e^x \\ &\implies x < xe^c < xe^x \quad (\text{car } x > 0) \\ &\implies x < e^x - 1 < xe^x \end{aligned}$$

On remarque qu'on a l'égalité des trois termes au point 0.

D'où,

$$\forall x \geq 0, \quad x \leq e^x - 1 \leq xe^x$$

Ainsi,

$$\forall x \geq 0, \quad (x - 1)e^x + 1 \geq 0.$$

Exercice 13

Calculons les limites suivantes en appliquant la règle de l'HOSPITAL.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2(x))}{\cos(x) - 1} = ?$$

Cette limite est une Forme Indéterminée $\frac{0}{0}$. Or,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1 + \sin^2(x))]' }{[\cos(x) - 1]'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{1 + \sin^2(x)} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)} \\ &= -2 \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2(x))}{\cos(x) - 1} = -2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1 + x)}{x^3} = ?$$

Cette limite est une Forme Indéterminée $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[e^x - 1 + \ln(1 + x)]'}{[x^3]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[e^x - \frac{1}{1-x}]'}{[3x^2]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{1}{(1-x)^2}}{6x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[e^x - \frac{1}{(1-x)^2}]'}{[6x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{2}{(1-x)^3}}{6} = -\frac{1}{6}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1 + x)}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

Remarque : On peut utiliser la règle de l'HOSPITAL autant de fois qu'on veut.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1) + e^x}{x + e^x} = ?$$

Cette limite est une Forme Indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Or,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(e^x + 1) + e^x]'}{[x + e^x]'} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{1 + e^x} + e^x}{1 + e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1 + e^x}{e^{-x} + 1}} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1) + e^x}{x + e^x} = 1.$$

Exercice 14

Déterminons, en cas d'existence, les extremums et les points d'inflexion des fonctions suivantes :

- La fonction définie par :

$$f(x) = x^4 - x^3 + 1$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Pour chercher les extremums de f , on cherche tout d'abord ses points critiques, i.e., les solutions de l'équation $f'(x) = 0$. On parle ici de la condition nécessaire du premier ordre.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 4x^3 - 3x^2 = 0 \\ &\iff x^2(4x - 3) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Les points critiques de f sont donc $(0, 1)$ et $(\frac{3}{4}, f(\frac{3}{4}))$. Comme f est deux fois dérivable, on fait appel à la condition suffisante du deuxième ordre pour déterminer la nature de ces points critiques.

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\iff 12x^2 - 6x = 0 \\ &\iff 6x(2x - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$f''(x)$	+	0	+
$f(x)$	convexe	concave	convexe

Comme $f'(\frac{3}{4}) = 0$ et $f''(\frac{3}{4}) > 0$ alors la courbe représentative de f , notée \mathcal{C}_f , présente au point d'abscisse $\frac{3}{4}$ un minimum relatif.

Comme $f''(0) = 0$ et $f''(x)$ change de signe de part et d'autre de 0 alors le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de \mathcal{C}_f et la courbe au voisinage de 0 étant convexe pour $x < 0$ et concave pour $x > 0$.

Comme $f''(\frac{1}{2}) = 0$ et $f''(x)$ change de signe de part et d'autre de $\frac{1}{2}$ alors le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est un point d'inflexion de \mathcal{C}_f et la courbe au voisinage de $\frac{1}{2}$ étant concave pour $x < \frac{1}{2}$ et convexe pour $x > \frac{1}{2}$.

- La fonction définie par :

$$g(x) = x^2 e^{-x}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Pour chercher les extremums de g , on cherche tout d'abord ses points critiques, i.e., les solutions de l'équation $g'(x) = 0$. On parle ici de la condition nécessaire du premier ordre.

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\iff 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \\ &\iff x(2-x)e^{-x} = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2. \end{aligned}$$

Les points critiques de g sont donc $(0, 0)$ et $(2, 4e^{-2})$. Comme g est deux fois dérivable, on fait appel à la condition suffisante du deuxième ordre pour déterminer la nature de ces points critiques.

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\iff (2-2x)e^{-x} - (2x-x^2)e^{-x} = 0 \\ &\iff (x^2 - 4x + 2)e^{-x} = 0 \\ &\iff (x-2)^2 - (\sqrt{2})^2 = 0 \\ &\iff (x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2}) = 0 \\ &\iff x = 2+\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = 2-\sqrt{2}. \end{aligned}$$

x	0	$2-\sqrt{2}$	2	$2+\sqrt{2}$	
$g''(x)$	+	\emptyset	-	\emptyset	+
$f(x)$	convexe		concave		convexe

Comme $g'(0) = 0$ et $g''(0) > 0$ alors la courbe représentative de f , notée \mathcal{C}_g , présente au point d'abscisse 0 un minimum relatif.

Comme $g'(2) = 0$ et $g''(2) < 0$ alors \mathcal{C}_g présente au point d'abscisse 2 un maximum relatif.

Comme $g''(2-\sqrt{2}) = 0$ et $g''(x)$ change de signe de part et d'autre de $2-\sqrt{2}$ alors le point d'abscisse $2-\sqrt{2}$ est un point d'inflexion de \mathcal{C}_g et la courbe au voisinage de ce point étant convexe pour $x < 2-\sqrt{2}$ et concave pour $x > 2-\sqrt{2}$.

Comme $g''(2+\sqrt{2}) = 0$ et $g''(x)$ change de signe de part et d'autre de $2+\sqrt{2}$ alors le point d'abscisse $2+\sqrt{2}$ est un point d'inflexion de \mathcal{C}_g et la courbe au voisinage de ce point étant concave pour $x < 2+\sqrt{2}$ et convexe pour $x > 2+\sqrt{2}$.

Exercice 15

Déterminons pour quelles valeurs du réel a la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{ax^2}{x-1}$$

est convexe ou concave.

\rightsquigarrow si $a = 0$ alors $f(x) = 0$ et donc f est constante.

$\rightsquigarrow f$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2ax(x-1) - ax^2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{ax(x-2)}{(x-1)^2} \\ f''(x) &= \frac{(a(x-2) + ax)(x-1)^2 - 2ax(x-2)(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2ax^2 - 2ax - 2ax + 2a - 2ax^2 + 4ax}{(x-1)^3} \\ &= \frac{2a}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Comme $x-1 > 0$ pour tout $x \in]1, +\infty[$ alors,

$$\begin{cases} \text{si } a > 0, & f \text{ est convexe sur }]1, +\infty[\\ \text{si } a < 0, & f \text{ est concave sur }]1, +\infty[\end{cases}$$

Comme $x-1 < 0$ pour tout $x \in]-\infty, 1[$ alors,

$$\begin{cases} \text{si } a > 0, & f \text{ est concave sur }]-\infty, 1[\\ \text{si } a < 0, & f \text{ est convexe sur }]-\infty, 1[\end{cases}$$

Un petit test de connaissances

	Vrai	Faux
1. Le domaine de définition de la fonction dérivée f' coïncide avec celui de f		✓
2. Toute fonction non continue en un point est non dérivable en ce point	✓	
3. Si une fonction dérivable f est paire sur D_f alors sa dérivée f' est impaire sur D'_f	✓	
4. "La dérivée première nulle" est une condition nécessaire et suffisante d'optimalité		✓
5. La fonction f est concave sur l'intervalle I si $(-f')$ est convexe sur I	✓	